

Mængdelæren og de reelle tal

Inspireret af problemer i teorien for konvergens af uendelige rækker begyndte Georg Cantor (1845-1918) i 1870'erne at udarbejde en teori for uendelige mængder. En central ide i hans arbejde var begrebet *mægtighed* eller *kardinalitet* af uendelige mængder: Hvis der findes en éntydig afbildning, der til ethvert element i én uendelig mængde tilordner ét og kun ét element i en anden, siges de to mængder at have samme kardinalitet. Definitionen gjorde det muligt at undersøge, om to uendelige mængder er lige mægtige, eller om den ene har større mægtighed end den anden. Cantor benyttede begrebet til at bevise det overraskende resultat, at mængden af alle rationale tal (dvs. alle brøker med hele tal i tæller og nævner) har samme mægtighed som mængden af alle hele tal. Det overraskende består naturligvis i, at den sidste er en ægte delmængde af den første: Alle hele tal kan skrives som brøker med 1 i nævneren, men de fleste brøker er ikke lig med hele tal. Galileo Galilei (1564-1642) havde allerede i 1636 benyttet en lignende metode til at vise, at kvadrattallene, 1, 4, 9, 16 osv., som jo er en ægte delmængde af de hele tal, er lige så stor som mængden af de hele tal, fordi man til ethvert kvadrattal kan tilordne det hele tal, som det er kvadratet af, og omvendt. Mens Galilei havde sluttet heraf, at det var meningsløst at bruge ord som »større end«, »lig med« og »mindre end« om uendelige størrelser, så fandt Cantor, at begrebet mægtighed gjorde dette muligt på en modsigelsesfri måde. En mængde med samme mægtighed som de hele tal

kaldes *tællelig*, fordi dens elementer kan nummereres med de hele tal, og Cantor viste, at den mindste uendelige mængde er tællelig. Han viste også (i 1874), at mængden af alle reelle tal ikke er tællelig og altså har større mægtighed end mængden af de rationale tal, og i 1877 viste han, til sin egen overraskelse, at mængden af punkter på en linie har samme mægtighed som mængden af punkter i et n -dimensionalt rum. I 1897 havde Cantor udviklet en kalkule for de uendelige, såkaldt transfinite, *kardinaltal*, som karakteriserede kardinaliteten af forskellige uendelige mængder, og i 1926 betegnede Hilbert denne transfinite aritmetik som »det paradis, Cantor skabte til os«.

Også i 1870'erne skabte Cantor i forening med Richard Dedekind (1831-1916) grundlaget for at forstå den logiske struktur af systemet af reelle tal, idet de hver for sig viste, hvordan man modsigelsesfrit kunne konstruere de irrationale tal (som f.eks. tallet $\sqrt{2}$) ud fra de rationale tal. Cantors metode bestod i at definere et vilkårligt reelt tal ved hjælp af de såkaldte fundamentalfølger af rationale tal, dvs. uendelige talfølger for hvilke $a_{n+m} - a_n \rightarrow 0$ for $n \rightarrow \infty$ og fastholdt, vilkårligt m . Ifølge definitionen er ethvert reelt tal således givet som grænseværdien af en sådan følge af rationale tal. Cantor kunne nu vise, at de sædvanlige regneoperationer kunne defineres for to reelle tal ved de tilsvarende operationer udført på de tilhørende fundamentalfølger, og endvidere, at fundamentalfølger af *reelle* (rationale og irrationale) tal ikke førte til andre grænseværdier end følgerne af rationale tal alene, så hans konstruktion gjorde de reelle tal til et fuldstændigt, afsluttet system.

Dedekind gik frem ved at definere et tal som et såkaldt »snit« i mængden af alle rationale tal. Et snit er en inddeling af de rationale tal i to mængder A_1 og A_2 , sådan at ethvert tal i A_1 er mindre end ethvert tal i A_2 . Hvis der findes et rationalt tal, som enten er det største i A_1 eller det mindste i A_2 , så er snittet bestemt af det pågældende rationale tal. Et sådant tal findes imidlertid ikke altid. Hvis man eksempelvis definerer A_1 som bestående af alle negative rationale tal samt alle de positive rationale tal, hvis kvadrater er mindre end 2, og A_2 som alle de øvrige, er snittet (A_1, A_2) ikke repræsenteret af noget rationalt tal; men Dedekind definerede nu dette snit til at skabe det irrationale tal $\sqrt{2}$. Han kunne nu vise, at der til ethvert snit i mængden af de således definerede reelle tal

findes ét, og kun ét, reelt tal; og at de sædvanlige regneregler gælder for dette talsystem.

Cantors og Dedekinds konstruktioner viste, at de irrationale tal logisk set er ganske sofistikerede objekter, eftersom de begge var tvunget til at benytte uendelige samlinger af rationale tal for at definere dem. De forudsatte også begge, at de rationale tal var givet på forhånd, og spørgsmålet var nu, om disse kunne gives et logisk uangribeligt grundlag. Dette problem kunne forholdsvis let reduceres til et problem om at skabe et grundlag for de naturlige tal, 1, 2, 3... Man kunne naturligvis tage samme standpunkt som L. Kronecker (1823-91), der mente, at man her burde nøjes med at stole på menneskets fundamentale intuition. »Gud skabte de hele tal«, sagde han, »alt andet er menneskets værk«. Ikke alle var enige; bl.a. udarbejdede Dedekind 1872-78 en teori, som han offentliggjorde i værket *Was sind und was sollen die Zahlen* fra 1888. Den var så kompliceret, at den fik ringe indflydelse, men nogle af dens resultater blev benyttet af Giuseppe Peano (1858-1932) i et berømt værk fra 1889. Peano opstillede her et system af fem aksiomer for de naturlige tal samt definitioner af addition og multiplikation og viste de velkendte egenskaber ved tallene. Herudfra kunne han definere de negative hele tal og brøkerne og etablere regnereglerne for dem.

Peanos aksiomsystem kunne opfattes som slutstenen i det logiske grundlag for aritmetikken. Nu kunne man begynde med at frembringe de naturlige tal, derefter konstruere alle de rationale tal og sluttelig få alle de reelle tal frem ved hjælp af Cantors fundamentalfølger eller Dedekinds snit. Hilbert kaldte dette den genetiske metode og satte den i modsætning til sin egen aksiomatiske metode, som han fandt mere sikker ud fra et strengt logisk synspunkt. I 1899, samme år som hans aksiomsystem for geometrien udkom, offentliggjorde han et tilsvarende abstrakt aksiomsystem for de reelle tal, hvor han behandlede tallene som udefinerede størrelser, der først fik deres egenskaber gennem de opstillede aksiomer. Han kunne ganske vist ikke bevise, at hans aksiomsystem var konsistent, men hævdede, at når et sådant bevis var fundet, sikrede systemet de reelle tals eksistens i matematisk forstand. Det skulle vise sig, at beviset voldte større vanskeligheder, end han havde forventet (se omtalen af Kurt Gödel (1906-78) i næste periode).

I 1850 ville de fleste matematikere have skrevet under på, at deres

videnskab handlede om aspekter af den fysiske virkelighed, og at den gav en sand, om end abstrakt, beskrivelse af virkelige relationer i verden. 50 år senere var matematikerne blevet vant til at operere med »kunstige« begreber som rum af vilkårlig dimension eller transfinite tal, der ikke havde noget modstykke i den virkelige verden. Den ikke-euklidiske geometri havde sat spørgsmål ved geometriens sandhed, og geometriens og aritmetikkens grundlag var kun blevet etableret ved hjælp af systemer af aksiomer, der ikke begrundedes med henvisning til noget fysisk eksisterende, men i princippet var skabt frit af den menneskelige tanke. Omkring 1900 var den fremherskende opfattelse, at matematikken ikke handlede om naturen, men om logisk deduktion af konsekvenserne af vilkårligt valgte aksiomer. Kun i de få tilfælde, hvor nogle aksiomer stod i relation til forhold i virkeligheden, kunne en teori og dens begreber tillægges fysisk betydning. Cantor udtrykte denne opfattelse allerede i 1883: »Matematikken er fuldstændig fri i sin udvikling, og dens begreber begrænses kun af nødvendigheden af at være modsigelsesfri og koordinerede med begreber, der er indført tidligere ved præcise definitioner.«