E L E M E N T Æ R A F D E L I N G

NR. 21

Om Uendelighedsbegrebet i Matematikken

Lars C. Mejlbo

August 1988.

Kapitel 18. Om mængdelærens paradoxer.

Der er tre paradoxer - eller rettere logiske antinomier eller selvmodsigelser - der har spillet en særlig rolle for matematikkens udvikling i det 20. århundrede.

Nu er logiske paradoxer ikke nogen nyhed i matematikken f.ex. levede man ret lykkeligt i både det 17. og 18. århundrede med differentialerne, der var $\neq 0$, så længde det var påkrævet, og som optrådte som nuller, når det var mest bekvemt.

Der var også mange matematikere f.ex. Hausdorff, der tog mængdelærens paradoxer lige så roligt; men når de nok har virket extra chokerende, er det vel dels fordi man efter den kritiske indsats i det 19. århundrede troede, at den hellige grav var velforvaret, dels at mindst ét af paradoxerne direkte griber ind i logikken og filosofien, det var ikke blot matematikken, der blev ramt.

Mængdelærens paradoxer er tilsyneladende omgivet af en hel del myter, som kun delvis kan opklares, og om dem vil jeg nøjes med nogle få bemærkninger, samt henvise til litteraturen.

Jeg har allerede været inde på nogle af paradoxerne (se f.ex. slutningen af kapitel 11 og kapitel 13), men nu vil jeg være lidt mere systematisk.

Det først publicerede er - måske - det såkaldte Burali-Forti paradox, opkaldt efter italieneren Cesare Burali-Forti [1897].

Det har jeg allerede været inde på i kapitel 13, og i kapitlerne 14 og 17 har vi også set, hvorledes det kan udnyttes positivt.

Groft sagt går Burali-Forti paradoxet ud på, at man konstaterer

1° Enhver velordnet mængde har et ordinaltal. Da Ord er velordnet, må den derfor have et ordinaltal, som åbenbart må være det største.

2° Der findes ikke noget største ordinaltal.

Her er klart tale om en modstrid.

Navnet "Burali - Forti" synes at være knyttet til paradoxet af Bertrand Russell (1872 - 1970) vist nok i 1903. Skal man tro kloge mennesker, så står det faktisk ikke i [Burali - Forti 1897], for han havde misforstået Cantors definition på en velordnet mængde, og han troede at kunne bevise, at ordinaltallene ikke altid er sammenlignelige i størrelser. Han brugte et indirekte bevis, som naturligvis ender med en selvmodsigelse - det gør indirekte beviser jo. Historien er fremstillet i [Moore / Garciediego 1981].

Russells formulering giver imidlertid et ægte paradox.

Et andet paradox, som Russell tilsyneladende også har ansvaret for, kaldte han for Cantors paradox, fordi det anvender Cantors bevis [1890/91] for existensen af store kardinaltal (se kapitel 7).

Cantors paradox:

1° Mængden af alle existerende eller blot tænkelige ting har det største kardinaltal.

2° Der findes ikke noget største kardinaltal.

Der er klart tale om en modstrid.

Disse paradoxer er ret tekniske i matematisk forstand, og de griber næppe direkte ind i filosofien. Men ved at spekulere over dem kom Russell til "sit eget" paradox, der er langt simplere, og som kun bygger på den rene logik.

Hvis $P(x)$ står for et eller andet udsagn med x som fri variabel f.ex. 'x er et menneske', så er

(1) $$\{x \mid P(x)\}$$

omfanget af udsagnet, f.ex. mængden af alle mennesker.

I logikken og filosofien er det nødvendigt, at man i en eller anden forstand kan tale om omfanget af et velformet udsagn.

I den almindelige logik er '$x \in x$' et fuldt ud tilladeligt udsagn (omend lidt sært), og '$\neg(x \in x)$' eller '$x \notin x$' er derfor også et tilladeligt udsagn. Dets omfang er

(2) $$R = \{x \mid x \notin x\}\ .$$

Men nu er vi i kvaler, for af definitionen på R følger

1° $R \in R \Rightarrow R \notin R$

2° $R \notin R \Rightarrow R \in R$.

Altså en selvmodsigelse.

Læseren kan se dette paradox' historie i [Moore/Garciediego 1981] og [Grattan-Guinness 1978]. Iøvrigt fandt Zermelo paradoxet selvstændigt i 1901 lidt tidligere eller måske samtidigt med Russell [Rang/Thomas 1981], men han publicerede det aldrig.

Hos Russell synes der også at have været en vis tøven, det varede mindst et år, inden han omtalte sit paradox offentligt, det var først efter, at Gottlob Frege (1848 - 1925) i deres brevvexling havde overbevist ham om dets betydning.

Frege anses af mange for at være den mest betydningsfulde logiker siden Aristoteles, idet han lavede den matematiske logik, altså som den første udviklede kvantorlogikken - for nu at sige det meget kort.

Frege troede, at han kunne bygge aritmetikken, ja, hele matematikken - bortset fra de geometriske videnskaber - op på simple logiske antagelser. Men desværre for ham var der blandt disse antagelsen om existensen af omfanget af ethvert udsagn som mængde. Uden denne antagelse bryder hans opbygning sammen, og det erkendte han med kompromisløs ærlighed.

Det lykkedes ham aldrig at reparere sin fejl, og selvom det i en vis forstand lykkedes for Russell og Whitehead (1861 - 1947) i deres store værk Principia Mathematica [1910], så blev det på den bekostning, at systemet blev så kompliceret, at ingen matematiker (og til slut heller ikke forfatterne selv) kunne acceptere det som et grundlag for matematikken.

Freges egne skrifter er - ligesom Principia - temmeligt ulæselige for almindelige matematikere. En forholdsvis let læst fremstilling af hans ideer sammenlignet med Dedekinds og Peanos (1858 - 1932) findes i [Gillies 1982].

Dedekind blev også hårdt ramt af paradoxerne, idet han måtte erkende, at hans forsøg på at opbygge matematikken på mængdelæren (eller "logikken") i "Was sind und was sollen die Zahlen" fra 1888 var brudt sammen. I forordet til 3.udgave 1911 skrev han, at han havde holdt nyudgivelsen tilbage i 8 år i håb om, at paradoxet skulle kunne opløses. Det var ikke sket, men da han stadig håbede, udsendte han bogen uændret.

Men hvad med Cantor? Som skaberen af mængdelæren burde han jo føle sig helt slået ud - men det gjorde han faktisk ikke! Og det skal jeg prøve at komme tilbage til i næste afsnit.

I den foreliggende fremstilling er jeg krøbet udenom paradoxerne ved at bruge det - tilsyneladende meget billige - trick, at erklære omfanget (1) af et udsagn f.ex. 'x er et ordinaltal' for at være en klasse, som ikke nødvendigvis er en mængde, en "ægte klasse". Kendetegnet på, at noget f.ex. Ord er en ægte klasse, er såmænd blot, at det fører til en modstrid at kalde det en mængde (!). Det svarer meget nøje til, at Cantor i sit brev til Dedekind fra 1899 talte om "inkonsistente" og "konsistente" mængder, hvor de første er de "ægte klasser".

I en formaliseret udgave af Zermelo - Fraenkels axiomsystem er der ingen plads til "ægte klasser", men de er der alligevel i form af symboler som (1), de må blot ikke behandles som mængder. I det formaliserede von Neumann - Bernays - Gödel axiomsystem er de "ægte klasser" med, idet en mængde så bliver en klasse, der kan optræde som element af en klasse, mens en "ægte klasse" ikke kan optræde som element. Se [Hallet 1984].

På en vis måde er det altså et billigt trick, som jeg har brugt, for man kan kun afgøre, om en vis klasse faktisk er en "ægte klasse" ved at se, om der kommer en modstrid ud af at antage, at den er en mængde. Og det kan man jo aldrig være sikker på.

På den anden side, så har Gödel i [1931] vist, at man principielt ikke kan vide, om et givet axiomsystem er konsistent. Men man kan dog se, om kendte paradoxer kan opstå eller ej, og det kan de ikke, hverken i ZF eller i NBG systemet. Men det kan de heller ikke hos mig, fordi jeg ad hoc har udelukket dem. Det kan man jo også, selvom det næppe er så rent som et axiomsystem.

De såkaldte semantiske paradoxer har været kendt siden antikken. hvor de blev "dyrkede" af den Megariske skole. Det kendte løgnerparadox stammer herfra. I sin korteste form lyder det

"Jeg lyver" .

Er det sandt, eller er det løgn? Mere udførligt kan det udformes således:

"Jens Jensen stod op den 11.8.1987 og udtalte
'Hvad jeg siger i dag, er usandt'.
Derefter gik han i seng igen og sagde intet
mere resten af den dag".

Er det sandt, eller er det usandt, hvad han sagde?

En tredie udformning består af et kort med side 1 og side 2:

På side 1 står

"Sætningen på side 2 er sand".

Men på side 2 står

"Sætningen på side 1 er usand".

Kan disse sætningen være sande, eller turde de være løgn begge to?

Løgnerparadoxet kan udformes på mange måder og har tilsyneladende ikke meget med matematik at gøre. Det synes imidlertid at have inspireret Gödel, og det er jo dog noget.

Det såkaldte Berry's paradox går mere direkte på matematikken:

Visse naturlige tal kan defineres med færre end 100 ord på dansk f.ex. "2 er antallet af heste i et par". På den anden side kan kun endeligt mange tal defineres med færre end 100 ord, i det mindste hvis vi lidt vilkårligt antager, at ord ikke kan være på flere end 10^6 bogstaver - og det kan de vel ikke? Nu udgør de naturlige tal en velordnet mængde, og jeg kan derfor definere

(3) "Det mindste tal, der ikke kan defineres med færre end 100 ord".

Men nu har jeg netop defineret dette tal med færre end 100 ord!

I den sædvanlige matematik undgår man både de logiske og de semantiske paradoxer ved god opdragelse og smag. Ingen matematiker ved sine fulde fem vil jo udtale en sætning som (3) i nogen alvorlig sammenhæng. Ej heller er "mængden af alle mængder" et begreb, som kan tages særligt højtideligt i sædvanlig matematik.

Men "god opdragelse og smag" er måske ikke det solideste, man kan bygge på, og derfor har man forsøgt at få bragt muligheden af paradoxer ud af det matematiske sprog.

Russell og Whitehead forsøgte i Principia Mathematica, og David Hilbert (1862 - 1943) gjorde med sin bevisteori et virkeligt heltemodigt forsøg. Gödels sætning fra 1931 viste umuligheden heraf.

Kroneckers efterfølger, Brouwer og konstruktivisterne, er på en måde mere vellykkede, men på bekostning af en amputation af matematikken, som de fleste matematikere ikke er villige til at acceptere.

Alt i alt får man lyst til at citere Wittgenstein (1889 - 1951) [1956 s. 171e].

> 13. What does mathematics need a foundation for?
> It no more needs one, I believe, than propositions
> about physical objects - or about sense impressions,

need an _analysis_. What mathematical propositions do stand in need of is a clarification of their grammar, just as do those other propositions.

The _mathematical_ problems of what is called foundations are no more the foundation of mathematics for us than the painted rock is the support of a painted tower.

'But didn't the contradiction make Frege's logic useless for giving a foundation to arithmetic?' Yes, it did. But then, who said that it had to be useful for this purpose?.

One could even imagine a savage's having been given Frege's logic as an instrument with which to derive arithmetical propositions. He derived the contradiction unawares, and now he derives arbitrary true and false propositions from it.

'Up to now a good angel has preserved us from going _this_ way.' Well, what more do you want? One might say, I believe a good angel will always be necessary, whatever you do.

Kapitel 7. Zenons paradoxer.

Elea var også en af de græske kolonier i Syditalien, og den var center for en filosofisk skole, der stod i opposition til pythagoræerne.

Den første af "eleaterne" var Xenophanes (se s. 1.6), men de mest kendte filosoffer af denne skole var nok Parmenides og Zenon. Man mener, at Zenon var elev af Parmenides, og man fastlægger Zenons liv til ca. 450 f.Kr., så Parmenides var nok lidt ældre.

Både Zenon og Parmenides optræder i Platons dialog "Parmenides" sammen med den unge Sokrates, og hvis det ikke blot er en digterisk frihed, så passer det meget rimeligt med årstallet 450.

Eleaterne hævdede - i modsætning til pythagoræerne - at alt det virkeligt værende er en enhed, der er evig og uforanderlig, i modsætning til den sansede verdens flux. Således sagde Parmenides:

> Tænken og Væren er det samme
>
> Se, hvorledes det fjerne er dig tydeligt nær i din Tanke; thi den vil ikke skille det Værende fra det Værende, da dette jo intetsteds paa nogen Maade skilles i sin ordnede Sammenhæng og heller ikke forenes paany.
>
> [Harsberg 1954, s.31].

Det er næsten klart, at eleaterne, måske specielt Parmenides, bliver en vigtig forudsætning for Platons idelære, og det er nok ikke tilfældigt, at Parmenides i dialogen optræder som Platons talerør og kritiker af den naive idelære, som fremsættes af Sokrates, der i denne dialog nærmest bliver pulveriseret. Platon havde en dyb, men næppe ukritisk, respekt for Parmenides.

Eleaterne blev naturligvis angrebet, og man viste, at deres lære fører til mange paradoxer. Zenons paradoxer, og i dialogen hævder han at have fremsat over 40, havde til formål at vise, at tanken om det værendes mangfoldighed fører til endnu flere paradoxer.

Det man i dag kalder Zenons paradoxer er fire udsagn, som er overleveret af Aristoteles i hans værk om fysik. Aristoteles formulerer paradoxerne meget kortfattet i den hensigt at gendrive dem, og det behøver der - som nævnt s. 1.2 - ikke at være noget ondt i, men resultatet er, at vi ikke præcist ved, hvad Zenon egentlig har sagt.

På en måde har det nok været en fordel for de efterfølgende filosoffer, de kunne så lægge forskellige forudsætninger i dem, og de har derved fået mulighed for at begrunde forskellige forklaringer. Det er måske grunden til, at filosoffer og filosofisk interesserede matematikere og naturvidenskabsfolk har kunnet diskutere dem helt op til vore dage og stadig gør det.

De fleste matematikere og fysikere har imidlertid holdt sig udenfor denne diskussion - måske med god grund. Det hævdes, at paradoxerne har haft stor indflydelse på matematikkens udvikling. Det kan man efter min mening sætte en hel del spørgsmålstegn ved - men jeg kan jo meget vel tage fejl.

Zenons paradoxer har til formål at vise bevægelsens umulighed, og de falder i to grupper med to i hver.

Den ene gruppe har som forudsætning, at tiden og rummet er diskrete, den anden, at tiden og rummet er uendeligt delelige. Traditionelt kaldes de første for "Pilen" og "Stadion", mens de to andre kaldes "Dichotomien" og "Achilleus og skildpadden".

Hvis rum og tid er diskrete, så kan en pil ikke flytte sig, fordi den til ethvert tidspunkt befinder sig i ro i ét rumpunkt.

Hvis rækkerne A og C betegner væddeløbere på stadion, mens rækken B er stationær, så kan man forestille sig, at vi på ét tidspunkt har situationen

A A A A A A
B B B B B B
C C C C C C

og hvis A og C løber med samme fart i modsat retning, ser vi, at vi i næste tidspunkt har situationen

A A A A A A
  B B B B B B
    C C C C C C .

C's bevægelse relativt til A er den dobbelte af den "absolutte" bevægelse i forhold til B, så hvis C har passeret ét punkt af B i et (mindste) øjeblik, så har C passeret to punkter af A i dette øjeblik - men hvornår har C så passeret ét punkt i A?

Hvis rum og tid er uendeligt delelige, så kan man ikke komme fra ét sted til et andet, uden først at passere den halve, den halve heraf etc., man kan altså ikke komme fra ét sted til et andet uden at passere uendeligt mange steder i en endelig tid - og det er umuligt (Dichotomien).

Det mest berømte af paradoxerne er Achilleus og skildpadden. Den rapfodede Achilleus kan ikke overhale den langsomme skildpadde i et væddeløb, hvis skildpadden har forspring, for han skal først nå det sted, som skildpadden startede fra. På det tidspunkt er skildpadden nået lidt længere, så Achilleus må bruge lidt tid på at nå dertil, og så er skildpadden kommet en lille smule længere etc. Achilleus kan altså kun nå skildpadden ved at passere uendeligt mange steder på en endelig tid - og det er umuligt.

Det er meget svært at sige, hvor stor Zenons direkte eller indirekte indflydelse har været på matematikernes opfattelse af kontinuet. Det er en kendsgerning, at både Euklid og Archimedes var meget forsigtige, når de nærmede sig det uendelige, f.ex. siger Euklid aldrig, at en linie består af punkter. Men om det skyldes

Zenons indflydelse f.ex. gennem Aristoteles er umuligt at sige, det kunne jo også skyldes den almindelige græske tilbageholdenhed overfor apeiron.

Måske har Zenon og eleaterne generelt betydet meget mere for logikkens udvikling end for den egentlige matematiks.

Lidt uvenligt kan Zenons paradoxer tydes som de rene sofisterier. Boyer [1949, s.23] citerer Plutarch for følgende lille vers

> Also the two - edged tongue of mighty Zeno, who,
> Say what one would, could argue it untrue.

Mange matematikere tror, at de to sidste paradoxer reddes, når man konstaterer, at en uendelig række kan have en endelig sum. Hvis f.ex. Achilleus løber 10 gange så stærkt som skildpadden, den har én kilometers forspring, og løber med én kilometer i timen, ja så overhaler Achilleus efter

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} + \dots = 0{,}111\dots = \frac{1}{9}$$

times forløb.

Weyl siger hertil [1949, s.41 - 42], at argumentet er relevant og oplysende; men det passer ikke med hans opfattelse af kontinuet, som noget der er i sin vorden, og som principielt ikke kan "fuldstændiggøres".

En moderne tidsfilosof som Whitrow mener, at paradoxet medfører, at man må opfatte tiden som diskret, uanset at han naturligvis ved, at det kontinuerte tidsbillede tjener fysikerne godt i mange sammenhænge [1984, s.190 - 200].

Personligt mener jeg, at der med paradoxerne sker en sammenblanding af den "virkelige" verden og den matematiske modellering af samme. Det var vel tilgiveligt indtil ca.1800 (og nok lidt senere), men nu ?

Paradoxernes historie er fremstillet af Cajori i [1915], og de er iøvrigt omtalt mange steder.