KILDER TIL MATEMATIKKENS HISTORIE

Redigeret af

Jesper Lützen og *Kurt Ramskov*

Anden udgave

Matematisk Afdeling, Københavns Universitet 1999

Tekst 35: Boole om logik

George Booles *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* fra 1854 var et af de tidligste forsøg på at opstille algebraiske regler for andet end tal. Nedenfor er gengivet udklip fra kapitel II og III efter oversættelsen til dansk i [Wolff 1967, pp. 229–52].

a) Hvad er formålet med teksten ifølge Boole?

b) Oversæt Booles begreber til moderne mængdeteori (eller udsagnslogik). Hvad svarer $\cdot$ og $+$ til? Læs omhyggeligt diskussionen, hvor $+$ indføres.

c) Hvad er motivationen for operationen $-$ og hvad svarer den til i moderne mængdeteori?

d) Hvorfor kan Boole ikke definere en operation svarende til division?

e) Boole lader efter Sætning II symbolet 0 betegne klassen "Nothing". Læs argumentet for Sætning IV og overvej bl.a. Booles fortolkning af symbolet 0 her.

George Boole

EN UNDERSØGELSE AF TANKENS LOVE, HVORPÅ ER GRUNDLAGT DE MATEMATISKE TEORIER FOR LOGIK OG SANDSYNLIGHEDSREGNING

Kapitel II

Om tegn i almindelighed og om logikkens tegn i særdeleshed; også om de love, som denne klasse af tegn er underkastet.

1. Det er en almindeligt indrømmet sandhed, at sproget er et instrument for den menneskelige fornuft og ikke blot et medium for tankens udtrykkelse. Det er i dette kapitel hensigten at undersøge, hvad det er, der gør sproget så tjenligt for denne vor vigtigste åndsevne. På de forskellige trin af denne undersøgelse føres vi til at betragte sprogets opbygning opfattet som et formålsbestemt system; at undersøge dets enkelte grundbestanddele; at gøre forsøg på at afgøre disses indbyrdes forbindelser og afhængighed; samt at undersøge på hvilken måde disse bidrager til opnåelsen af det mål, de som sideordnede dele af et system har tilknytning til. [...]

6. Da vi nu har defineret et tegn som et arbitrært mærke, er det tilladeligt at erstatte alle tegn af den ovenfor beskrevne art med bogstaver. Lad os derfor vedtage at repræsentere klassen af elementer, hvortil der kan knyttes en bestemt betegnelse eller beskrivelse, med et enkelt bogstav, f. eks. x. Hvis betegnelsen således er "mennesker", vil vi lade x repræsentere "alle mennesker" eller klassen af mennesker. Med en klasse menes der sædvanligvis en samling af elementer, hvortil der kan knyttes en bestemt betegnelse eller beskrivelse, men i dette arbejde udvides betydningen af dette udtryk til også at omfatte det tilfælde, hvor der kun findes et eneste element, der passer til den forlangte betegnelse eller beskrivelse, samt de tilfælde, der angives med udtrykkene "Intet" og "Universet", der som klasser skal opfattes som bestående henholdsvis af "ingen ting" og "alle ting". Hvis et adjektiv som "god" anvendes som et beskrivende udtryk, vil vi ligeledes lade et enkelt bogstav, f. eks. y, repræsentere alle de ting, om hvilke man kan

benytte beskrivelsen "god", dvs. "alle gode ting" eller klassen af "gode ting". Lad os endvidere vedtage, at kombinationen xy skal repræsentere klassen af ting, om hvilke man på samme tid kan anvende de betegnelser eller beskrivelser, der er repræsenteret af x og y. Hvis x således står for "hvide ting" og y for "får", vil vi lade xy stå for "hvide får". På samme måde vil vi, hvis z står for "ting med horn", og x og y bibeholder deres foregående betydninger, lade zxy repræsentere "hvide får med horn", dvs. den samling ting, på hvilke betegnelsen "får" og beskrivelserne "hvide" og "med horn" samtidigt passer.

Lad os nu betragte de love, som symbolerne x, y etc. i ovennævnte forstand er underkastet.

7. For det første er det ifølge ovennævnte måde at kombinere på klart, at den rækkefølge, hvori to symboler er skrevet, er ligegyldig. Udtrykkene xy og yx repræsenterer begge klassen af ting, på hvis enkelte elementer betegnelserne eller beskrivelserne x og y begge passer. Vi har altså:

$$xy = yx. \tag{1}$$

I det tilfælde, hvor x repræsenterer hvide ting, og y får, vil begge sider af denne ligning repræsentere klassen af "hvide får". Der kan være forskel i den orden, hvori begrebsdannelsen udføres, men ingen i de enkelte ting, som den omfatter. [. . .]

Herefter bemærker Boole, at den kommutative lov også gælder ved tre eller flere symboler og formulerer den generelt som en lov (det er den, der henvises til i det følgende).

8. Til den ovenfor fastlagte lov kan vi føje følgende betragtninger, som alle mere eller mindre vil være af interesse i forbindelse med visse andre love, der senere udledes.

For det første bemærker jeg, at denne lov egentlig er en lov om tænkning og ikke en lov om ting. En forskel i rækkefølgen af en genstands egenskaber eller kendetegn er, når man helt ser bort fra ethvert spørgsmål om årsagsfølge, blot en forskel i begrebsdannelsen. Loven (1) udtrykker som en generel sandhed, at den samme begrebsdannelse kan foregå på forskellige måder, og formulerer naturen af denne forskel; mere udsiger den ikke.

[. . .]

For det tredie kan den lov, der er udtrykt i (1), karakteriseres ved at sige, at *bogstavsymbolerne x, y, z er kommutative ligesom algebraens symboler.* Hermed er det ikke sagt, at algebraens multiplikationsproces, hvis fundamentale lov kommer til udtryk i ligningen

$$xy = yx,$$

i sig selv har nogen analogi med den logiske kombinationsproces, men kun, at dersom den aritmetiske og logiske proces udtrykkes på samme måde, da vil deres symbolske udtryk være underkastet samme formelle lov. Grundlaget herfor er i de to tilfælde helt forskelligt.

9. Da kombinationen af to bogstavsymboler til formen xy udtrykker hele den klasse af genstande, hvorpå de betegnelser og egenskaber, der repræsenteres af x og y, samtidig passer, følger det, at hvis to symboler har nøjagtigt samme betydning, da vil deres kombination ikke udtrykke mere end ethvert af dem taget for sig. I et sådant tilfælde har vi altså:

$$xy = x.$$

Da y imidlertid blev antaget at have samme betydning som x, kan vi i ovenstående ligning erstatte det med x, og således får vi:

$$xx = x.$$

Nu betegnes kombinationen xx i den sædvanlige algebra med x^2. Lad os benytte det samme notationsprincip her; thi den måde, hvorpå en bestemt følge af tankeoperationer udføres, er lige så vilkårlig som den måde, hvorpå en enkelt idé eller operation udtrykkes (II.3). I overensstemmelse med denne notation tager ovenstående ligning formen:

$$x^2 = x, \tag{2}$$

og den er i virkeligheden udtryk for endnu en generel lov for de symboler, der benyttes til at repræsentere betegnelser, egenskaber eller beskrivelser.
[. . .]

10. Vi går nu over til at betragte endnu en klasse af sprogsymboler og de love, der gælder for deres anvendelse.

KLASSE II

11. *Tegn for de tankemæssige operationer, ved hvis hjælp vi sammensætter dele til et hele og adskiller et hele i sine dele.*

Vi er ikke blot i stand til at nære forestillinger om genstande, således som de er karakteriseret ved betegnelser, egenskaber eller omstændigheder fælles for ethvert element i den betragtede gruppe, vi er tillige i stand til at danne os en helhedsforestilling om en gruppe af genstande bestående af enkelt-grupper, der hver for sig er betegnet og beskrevet. Hertil bruger vi konjunktionerne "og", "eller" etc. "Træer og mineraler", "golde bjerge eller frugtbare dale" er eksempler af denne slags. Når ordene "og", "eller" indskydes mellem de udtryk, der beskriver to eller flere klasser af genstande, er det udtrykkeligt underforstået, at disse klasser er helt adskilte, således at intet element i en af dem findes i en anden. I denne og i alle andre henseender er ordene "og", "eller" analoge med tegnet $+$ i algebraen, og deres love er identiske. Således er udtrykket "mænd og kvinder", når man ser bort fra konventioner, ensbetydende med udtrykket "kvinder og mænd". Lad x repræsentere "mænd" og y "kvinder", og lad $+$ stå for "og" og "eller"; vi har da

$$x + y = y + x \tag{3}$$

som er en ligning, der også gælder, hvis x og y repræsenterer *tal*, og $+$ er det aritmetiske additionstegn.

Lad symbolet z stå for adjektivet "europæisk"; vi har da, idet det jo er det samme at sige "europæiske mænd og kvinder" som at sige "europæiske mænd og europæiske kvinder":

$$z(x + y) = zx + zy, \tag{4}$$

og denne ligning ville ligeledes gælde, hvis x, y og z var symboler for tal, og hvis sammenstillingen af to bogstavsymboler betød deres algebraiske produkt, ligesom det i den tidligere givne logiske betydning repræsenterer klassen af genstande, til hvilken begge tillægsord i forening hører.

De ovenstående love er de love, der gælder for brugen af tegnet $+$, som her anvendes til at betegne den positive operation, der består i at samle dele til et hele. Men ideen om en operation, der udfører en positiv handling, synes at antyde en modsat rettet eller negativ operation, der ophæver virkningen af den førstnævnte. Vi kan således ikke betragte det som muligt at samle dele til et hele uden samtidig også at betragte det som muligt at adskille en del fra et hele. Denne operation udtrykker vi i dagligsproget med tegnet "undtagen" som i "alle mennesker undtagen asiater", "alle stater, undtagen dem, der har monarki". Det er her underforstået, at de ting, der undtages, er del af de ting, hvorfra de undtages. Da vi har udtrykt den samlende operation med tegnet $+$, kan vi udtrykke den ovenfor beskrevne operation med $-$ (minus). Repræsenterer x således "mennesker" og y "asiater", dvs. "asiatiske mennesker", så vil "alle mennesker untagen asiater" være udtrykt ved $x - y$. Og lader vi x repræsentere "stater" og y den beskrivende egenskab "der har monarki", så vil begrebsdannelsen "alle stater undtagen dem, der har monarki" være udtrykt ved $x - xy$.

Da det for de væsentlige formål med vor ræsonneren er ligegyldigt, om vi nævner undtagelserne først eller sidst, er det også ligegyldigt, i hvilken orden vi skriver en vilkårlig række led, hvoraf nogle er påvirket af tegnet $-$. Vi har altså som i den almindelige algebra,

$$x - y = -y + x. \tag{5}$$

Lad x fortsat repræsentere klassen "mennesker" og y "asiater", og lad z repræsentere adjektivet "hvid"; at bruge adjektivet "hvid" på den samling af mennesker, der er angivet ved sætningen "mennesker undtagen asiater", er det samme som at sige "hvide mennesker undtagen hvide asiater". Vi har følgelig

$$z(x - y) = zx - zy. \tag{6}$$

Dette er også i overensstemmelse med den sædvanlige algebra.

Ligningerne (4) og (6) kan betragtes som eksempler på en helt generel lov, som vi kan udtrykke ved at sige, at *bogstavsymbolerne x, y, z, etc. er distributive i deres operation.* [...]

Boole argumenterer derefter for, at der gælder, at hvis $x = y + z$ så er også

$$x - z = y$$

ligesom i den sædvanlige algebra. Dette opsummerer han i lovene:

1. Hvis ens ting lægges til ens ting, er helhederne ens.

2. Hvis ens ting tages fra ens ting, er resterne ens.

Det ses heraf, at vi kan addere eller subtrahere ligninger og anvende den ovenfor anførte regel for flytning af led ganske som i den sædvanlige algebra.

Endvidere: Hvis to klasser af ting x og y er identiske, dvs. hvis alle elementer i den ene er elementer i den anden og omvendt, da vil de elementer i den ene klasse, der har en givet egenskab z, være identiske med de elementer i den anden, der har den samme egenskab z. Har vi derfor følgende ligning

$$x = y;$$

vil vi, uanset hvilken klasse eller egenskab z repræsenterer, også have:

$$zx = zy.$$

Dette er formelt den samme som den algebraiske lov: Hvis begge sider i en ligning multipliceres med samme størrelse, da er produkterne lige store.

14. Her ser det imidlertid ud til, at analogien mellem det foreliggende system og algebraen, som den i almindelighed fremstilles, hører op. Antager vi, at det for elementerne i en klasse x, som har en vis egenskab z, gælder, at de er identiske med elementerne i en klasse y som har den samme egenskab z, følger det i almindelighed ikke, at elementerne i klassen x er identiske med elementerne i klassen y.

Ud fra ligningen

$$zx = zy$$

kan man altså ikke slutte, at ligningen

$$x = y$$

også er sand. Algebraikernes axiom om, at begge sider i en ligning kan divideres med samme størrelse, har med andre ord her ingen formel ækvivalent. [...]

Men en lille overvejelse vil vise, at dette axiom selv inden for den sædvanlige algebra ikke har den samme generalitet som de andre axiomer, vi har behandlet. Udledelsen af ligningen $x = y$ ud fra ligningen $zx = zy$ er kun gyldig, dersom det vides, at z ikke er lig med 0. Tillades værdien $z = 0$ i det algebraiske system, vil ovennævnte axiom ikke mere kunne anvendes, hvorved den tidligere eksemplificerede analogi i det mindste fortsat vil være ubrudt.

15. Det er imidlertid ikke med størrelsessymboler i almindelighed, at det er af betydning at opspore slægtskaber af denne art undtagen af rent spekulative grunde. Vi har set (II.9), at logikkens symboler er underkastet den specielle lov

$$x^2 = x.$$

Nu findes der kun to talsymboler, nemlig 0 og 1, der er underkastet den samme formelle lov. Vi ved, at $0^2 = 0$ og at $1^2 = 1$, og at ligningen $x^2 = x$ betragtet som algebraisk ligning ikke har andre rødder end 0 og 1. I stedet for alment at undersøge, hvor langt den formelle analogi mellem logikkens symboler og talsymbolerne kan føres, ligger det derfor umiddelbart nærmere at sammenligne dem med størrelsessymboler, *der kun kan antage værdierne* 0 *og* 1. Lad os da forestille os en algebra, hvor symbolerne x, y, z etc. kan antage værdierne 0 og 1 og kun disse værdier. Lovene, axiomerne og processerne i en sådan algebra vil i hele deres udstrækning være identiske med lovene, axiomerne og processerne i en logisk algebra. Kun i fortolkningen vil de adskille sig. Metoden for det følgende i dette arbejde hviler på dette princip.
[. . .]

KAPITEL III

SÆTNING II

13. *Om bestemmelsen af den logiske værdi og betydning af symbolerne* 0 *og* 1.
Symbolet 0 tilfredsstiller, som det bruges i algebraen, følgende formelle lov:

$$0 \times y = 0 \quad \text{eller} \quad 0y = 0, \tag{1}$$

uanset hvilket *tal* y repræsenterer. For at denne lov kan opretholdes i logikken, må vi til symbolet 0 knytte en fortolkning af en sådan art, at den *klasse*, der repræsenteres af $0y$, er identisk med den klasse, der repræsenteres af 0, uanset hvilken klasse y er. En nærmere overvejelse vil vise, at denne betingelse er opfyldt, hvis symbolet 0 repræsenterer Intet. I overensstemmelse med en tidligere definition kan vi kalde Intet en klasse. Intet og Universet er jo de to ydergrænser for klasser; thi de er grænserne for de mulige fortolkninger af navne i almindelighed, af hvilke ingen kan være knyttet til færre individer, end der omfattes af Intet, eller til flere, end der omfattes af Universet. Ligegyldigt hvilken klasse y er, så er de elementer, der er fælles for den og klassen Intet, identiske med de elementer, der omfattes af klassen Intet; thi der er ingen af dem. Og altså er, dersom vi til 0 knytter fortolkningen Intet, loven (1) opfyldt, og på anden måde kan den ikke tilfredsstilles i overensstemmelse med den fuldstændig almene karakter af klassen y.

For det andet tilfredsstiller symboler 1 i talsystemet følgende lov:

$$1 \times y = y \quad \text{eller} \quad 1y = y,$$

uanset hvilket tal y repræsenterer. Og antages denne formelle ligning for lige så gyldig i dette værks system, hvor 1 og y repræsenterer klasser, skal symbolet 1 repræsentere en klasse af en sådan art, at alle de elementer, der findes i *enhver* forelagt klasse y, tillige er alle de elementer $1y$, som er fælles for denne klasse og klassen, der repræsenteres af 1. En nærmere overvejelse vil her vise, at klassen, der repræsenteres af 1, må være Universet, da dette er den eneste klasse, hvori man finder *alle* elementer, som findes i enhver klasse. Følgelig er de respektive fortolkninger af symbolerne 0 og 1 i logikken *Intet* og *Universet.*

14. Da forestillingen om en klasse som "mennesker" antyder forestillingen om en modsat klasse af væsener, der ikke er mennesker, og hele Universet udgøres af disse to klasser tilsammen, idet vi om ethvert element, som det omfatter, kan hævde, enten at det er et menneske, eller at det ikke er et menneske, bliver det af betydning at undersøge, hvorledes sådanne modsatte angivelser skal udtrykkes. Dette er emnet for den følgende sætning.

SÆTNING III

Hvis x repræsenterer en vilkårlig klasse af genstande, da vil $1-x$ repræsentere den modsatte eller supplerende klasse af genstande, dvs. den klasse, der indeholder alle de genstande, der ikke er omfattet af klassen x.

For den større begrebsklarheds skyld vil vi lade x repræsentere klassen "mennesker" og i overensstemmelse med den sidste sætning betegne Universet med 1; hvis vi nu fra forestillingen om Universet som bestående af "mennesker" og "ikke-mennesker" udelukker opfattelsen "mennesker", så vil den resterende opfattelse være den modsatte klasse "ikke-mennesker". Følgelig vil klassen "ikke-mennesker" være repræsenteret af $1-x$. Og i almindelighed gælder, at ligegyldigt hvilken klasse der er repræsenteret af symbolet x, så vil den modsatte klasse udtrykkes ved $1-x$.

SÆTNING IV

Det af metafysikernes axiomer, der kaldes for modsigelses-princippet, og som hævder, at det er umuligt for noget væsen at besidde en egenskab og samtidig ikke besidde den, er en konsekvens af den fundamentale tankens lov, hvis udtryk er $x^2 = x$.

Lad os skrive denne ligning på formen

$$x - x^2 = 0,$$

hvoraf vi får

$$x(1-x) = 0, \tag{2}$$

idet begge disse transformationer er tilladt ifølge de axiomatiske love om kombination og omflytning (II.13). Lad os for simpelheds skyld give symbolet x den bestemte fortolkning "mennesker": $1 - x$ vil da repræsentere klassen af "ikke-mennesker" (Sætn. III). Nu repræsenterer det formelle produkt af udtrykkene for to klasser den klasse, der udgøres af de elementer, der er fælles for dem begge (II.6). Følgelig vil $x(1 - x)$ repræsentere den klasse, hvis elementer på én gang er "mennesker" og "ikke-mennesker", og ligningen (2) udtrykker derfor det princip, *at en klasse, hvis elementer på samme tid er mennesker og ikke-mennesker, ikke eksisterer;* med andre ord, *at det er umuligt for det samme individ på én gang at være et menneske og ikke et menneske.* Lad nu betydningen af symbolet x udstrækkes fra at repræsentere "mennesker" til at repræsentere en vilkårlig klasse af elementer karakteriseret ved en eller anden vilkårlig egenskab, og ligningen (2) vil da udtrykke, at det er umuligt for et væsen på samme tid at besidde en egenskab og ikke besidde denne egenskab. Men dette er identisk med "modsigelsesprincippet" som Aristoteles har betegnet som det fundamental axiom for al filosofi. "Det er umuligt, at den samme egenskab både skulle tilhøre og ikke tilhøre samme ting ... Dette er det visse af alle principper ... Hvorfor de, der beviser, henviser til dette som en grundanskuelse. Thi det er af naturen udspringet for alle de andre axiomer."

Ovenstående fortolkning er ikke indført på grund af dens umiddelbare værdi i det foreliggende system, men som en illustration af en betydningsfuld kendsgerning i filosofien om de intellektuelle evner, nemlig at det, der i almindelighed er blevet betragtet som metafysikkens fundamentale axiom, blot er en konsekvens af en tankens lov, matematisk i sin form.